CONCOURS ESTP-ENSAM

SESSION 1998

Filière MP

MATHÉMATIQUES 2

Durée: 4 heures

Nota: les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très distinctement *leur numéro. Leur 5ème question est, en général, la plus difficile. Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir* encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés.*

SUJET 1

La suite réelle (u_n) est définie par $u_0 \geq 0$, et $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ si $n \geq 1$.

1 Montrer que, pour tout $a \geq 0$, $\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(1+a)$.

2 Prouver que $\sqrt{n} \leq u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

3 Démontrer que $u_n \sim \sqrt{n}$.

4 Soit $w_n = u_n - \sqrt{n}$. Établir que la suite (w_n) admet une limite L , à préciser.

5 Montrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

SUJET 2

Pour x réel, on pose $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$, avec $f(0) = 1$, et $g(x) = (f(x))^2$. On note $f^{(p)}(x)$ et $g^{(p)}(x)$ pour les dérivées d'ordre p de $f(x)$ et $g(x)$.

1 Montrer que $f(x)$ est développable en série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence R.

2 Préciser $f^{(2n)}(0)$ et $f^{(2n+1)}(0)$, n entier ≥ 0.

3 Comparer $f(x)$ et $\int_0^1 \cos(xt)\,dt$. En déduire que $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout x réel.

4 Établir que $|g^{(n)}(x)| \leq \frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)}$ pour tout x réel.

5 D'après la question 3 , on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Démontrer qu'en fait $\sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)| < \frac{1}{2}$.

SUJET 3

Soit $f_n(x) = x^n \sin(x)$, x réel, n entier ≥ 0, et $I_n = \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx$.

1 Établir l'existence de $a_n \in [\frac{\pi}{2};\pi[$, tel que la fonction f_n croît sur $[0;a_n]$ et décroît sur $[a_n;\pi]$.

2 Que dire de la limite de la suite (b_n) telle que $b_n = f_n(a_n)$?

3 Par intégration par parties, préciser p_n et q_n tels que $I_n = p_n + q_n I_{n-2}$, $n \geq 2$.

4 La suite (I_n) tend-elle vers une limite finie ou infinie ?

5 Cette suite (I_n) est-elle monotone ?

SUJET 4

On définit f, fonction paire de période 2π, par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ si $x \in [0;\frac{\pi}{4}]$ et $f(x) = 0$ si $x \in]\frac{\pi}{4};\pi]$.

1 Préciser l'ensemble $E \subset [0;\pi]$ où $f(x)$ égale sa série de Fourier: $f(x) = a_0 + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + \ldots$

2 Calculer a_0 .

3 Pour $n \geq 2$, mettre $a_n + a_{n-2}$ sous la forme $\frac{c}{n-1}.\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{4}\right]$, la constante c étant à préciser.

4 Établir que la série $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \ldots$ converge. On désigne par s sa somme.

5 Pour tout $x \in [0;\frac{\pi}{4}]$, établir la relation $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 4\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$. Calculer s .

SUJET 5

On note E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues bornées sur $]0;+\infty[$. Pour $f \in E$, on considère les équations différentielles:

$(\mathbb{D})$: $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$, $x > 0$

$(\mathbb{H})$: $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $x > 0$

1 Préciser les réels r_1 et r_2, avec $r_1 < r_2$, tels que x^{r_1} et x^{r_2} soient solutions de $(\mathbb{H})$, $x > 0$.

2 Établir que $g(x) = \int_0^x -\frac{t}{3x^2} f(t)\,dt + \int_x^{+\infty} -\frac{x}{3t^2} f(t)\,dt$ est solution de $(\mathbb{D})$, $x > 0$.

3 On appelle T l'application qui à $f \in E$ associe g. S'agit-il d'un isomorphisme de E ?

4 Pour $\varphi \in E$, soit $\|\varphi\| = \sup_{x>0} |\varphi(x)|$. Déterminer une constante $C > 0$, telle que $\|g\| \leq C\|f\|$.

5 On suppose l'existence de $\lambda = \lim_{x\to 0} f(x)$. Montrer l'existence de $\mu = \lim_{x\to 0} g(x)$, et fournir sa valeur.